



TITLE:

# ある種の弱双曲型微分作用素に対する特異Cauchy問題 (フーリエ超函数と偏微分方程式)

AUTHOR(S):

高崎, 金久

---

CITATION:

高崎, 金久. ある種の弱双曲型微分作用素に対する特異Cauchy問題 (フーリエ超函数と偏微分方程式). 数理解析研究所講究録 1982, 459: 94-121

ISSUE DATE:

1982-05

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/103096>

RIGHT:

# ある種の弱双曲型微分作用素 に対する 特異 Cauchy 問題

東大理 高崎金久

## §1. 問題設定と背景説明

(( 目次は Reference の  
あとに付した. (p.28) ))

$(t, x) = (0, 0) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n$  の近傍で正則な係数をもち、初期面  
 $t=0$  上特性根が一斉に重なり合うような、或る種の  $m$  階弱双  
曲型微分作用素  $P(t, x, D_t, D_x) = D_t^m + \sum_{i=1}^m A_i(t, x, D_x) D_t^{m-i}$   
( $D_t = \frac{1}{i!} \frac{\partial}{\partial t}$ ,  $D_x = \frac{1}{i!} \frac{\partial}{\partial x}$ ,  $A_i$  は  $D_t$  を含まず order  $\leq i$ ) に対して、

### 特異 Cauchy 問題

$$(CP)_{i_0}^{\zeta} \begin{cases} P(t, x, D_t, D_x) u(t, x, y, \xi) = 0, \\ D_t^i u|_{t=0} = \delta_{ii_0} \langle x-y, \xi \rangle^{-n} \quad (0 \leq i \leq m-1), \end{cases}$$

の複素領域における正則解、及び特異 Cauchy 問題

$$(CP)_{i_0} \begin{cases} P(t, x, D_t, D_x) u(t, x, y, \xi) = 0, \\ D_t^i u|_{t=0} = \delta_{ii_0} \langle x-y, \xi + \sqrt{-1}0 \rangle^{-n} \quad (0 \leq i \leq m-1) \end{cases}$$

の実領域における hyperfunction 解を構成することを問題とする。

但し、 $i_0$  は任意に固定、また、 $y$  は  $\mathbb{C}^n$  の原点の近傍を、 $\xi$  は  
 $\mathbb{C}^n \setminus 0$  の中の  $\xi_0 = (1, 0, \dots, 0)$  の錐近傍を各々動くパラメータであ  
り、 $\langle x-y, \xi \rangle = \sum_{i=1}^n (x_i - y_i) \xi_i$  である。

$P(t, x, D_t, D_x)$  に対して以下の条件を仮定する：

仮定-1 (特性根の退化の状況).  $P$  の主表象  $P_m$  は次の

形で与えられる;

$$P_m(t, x, \tau, \xi) = \prod_{j=1}^m (\tau - t^q \lambda_j(\xi)),$$

ここに  $q$  は或る非負整数であり,  $\lambda_j(\xi) (1 \leq j \leq m)$  は  $\xi_0 = (1, 0, \dots, 0)$  の近傍  $\Omega_0 \subset \mathbb{C}^n$  で定義された 1 次齊次函数で  
(正則)

$$\lambda_j(\xi) \neq \lambda_k(\xi) \quad (j \neq k, \xi \in \Omega_0)$$

をみたすものである。

仮定-2 (双曲性).  $\xi$  が real ならば各  $\lambda_j(\xi)$  は real である。

仮定-3 (Levi条件).  $A_{ij}(t, x, \xi)$  を  $A_i(t, x, \xi)$  の  $\xi_i$  に関する  $j$  次齊次部分とし,  $A_{i,j,k}(x, \xi)$  を  $A_{ij}(t, x, \xi)$  の  $t$  に関する  $k$  次 Taylor 係数, i.e.  $A_{i,j,k} = \frac{1}{k!} \left( \frac{\partial}{\partial t} \right)^k A_{ij} \Big|_{t=0}$  とする. このとき,

$$A_{i,j,k} = 0 \quad (k < (q+1)j - i).$$

上のような特異 Cauchy 問題は microfunction 解 の意味では極めて一般的な状況 ( $P$  が  $dt$  方向に microhyperbolic) の下で柏原-河合 [10] により考察されている.  $\lambda = \xi$  は特性根の重複の状況に無関係に microhyperbolicity の下で microfunction 解の存在と一意性が証明されている. なお, 基本解が

$$\int_{|\xi|=1} u(t, x, y, \xi) \omega(\xi) \quad (j_0 = 0, 1, \dots, m-1) \quad \left( \omega(\xi) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \xi_i d\xi_1 \wedge \dots \wedge \widehat{d\xi_i} \wedge d\xi_n \right)$$

で与えられることを念の為に注意しておく. 我々の扱う作用

素は [10] の扱ったものの特殊な場合になる. しかし我々は, 常微分方程式の変わり点或は不確定特異点における解構成法

の理論を援用しつつ、より具体的に解を構成するのである。  
(→ §3, §4)

この方法は解の特異性のより微細な構造を調べるのに適しており、また後述するように、“特異性分岐現象”の解析にも利用  
(→ §2, §4) (→ §5) できる、という点に於ても興味深いものである。

我々の方法の原型はすでに多くの研究の中に見出せる。

(Alinhac [1], [2], [3] 天野 [4], 天野-中村 [5], 中村-瓜生 [12], 中根 [13], 谷口-戸崎 [19], 吉川 [21]) これらは我々の扱おうとする作用素（或はその一般化）に対して、多項式係数常微分方程式（これはパラメトリクスの“主要部分”を決定する）に  
(→ §3, §4) 対する解析を援用しつつ、Cauchy問題のパラメトリクスを構成している。しかし中根 [13] を除いていずれも  $C^\infty$  函数のカテゴリーで議論を展開している。（なお、新井 [17] も別の方法でパラメトリクスを構成している。→ §6）

我々は吉川 [21], 中村-瓜生 [12] で用いられた 準斉次部分 (semi-homogeneous part) の分解の方法に従って輸送方程式を  
(→ §2) 導出し、その解を逐次構成・評価する。この方法はパラメータ  
(→ §4) を含む常微分方程式における変わり点の理論に関する西本 [14] の方法と密接に関連するものである。しかし我々にはより注意深い評価が必要である。また、 $C^\infty$  理論では“Fourier 積分”の形でパラメトリクスが表示されたが、我々は  $(CP)^d, (CP)$  の解を後述するような“Radon 積分”の形に表示する。これは片岡 [11],  
(→ §2. (2.1) + (2.2)) 青木 [6] に動機づけられて導入されたものである。(→ §4, p14~15)

§2. 主要な結果

以下の記号を導入しておく:

$$\psi_j(t, \xi) = \lambda_j(\xi) t^{q+1} / (q+1),$$

$$\varphi_j(t, x, y, \xi) = \langle x - y, \xi \rangle + \psi_j(t, \xi),$$

$$r_j(t, \xi) = \max_{1 \leq k \leq m} |\psi_j(t, \xi/\xi_1) - \psi_k(t, \xi/\xi_1)|,$$

$$d(t, \xi_1) = (|t|^{2q+2} + |\xi_1|^{-1})^{1/(q+1)},$$

$$X = \{x \in \mathbb{C}^n; |x| < a\},$$

$$\Omega = \{\xi = (\xi_1, \xi') \in \mathbb{C}^n \setminus 0; |\xi'| < \ell |\xi_1|, |\arg \xi_1| < \ell\},$$

$$S_\sigma = \{t \in \mathbb{C} \setminus 0; |\arg(\sigma t)| < \frac{\pi}{2q+2} - \varepsilon\},$$

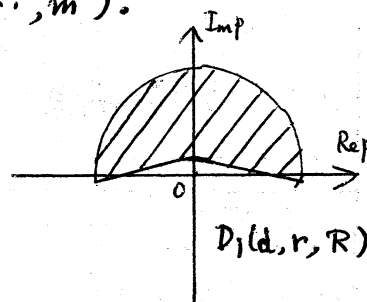
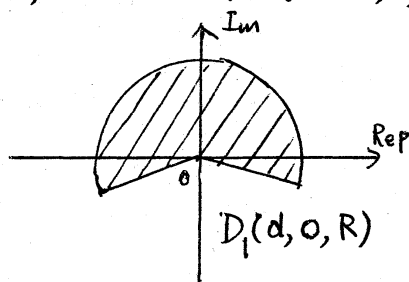
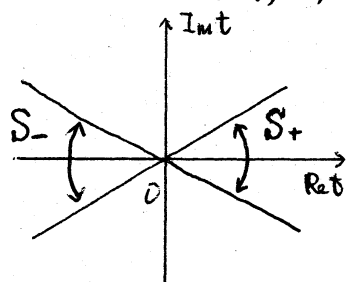
$$Z = \mathbb{C} \times X \times \Omega,$$

$$Z_\sigma = S_\sigma \times X \times \Omega,$$

$$D_0(r) = \{p \in \mathbb{C}; \operatorname{Im} p > r\},$$

$$D_1(d, r, R) = \bigcup_{-\ell < \theta < \ell} \{p \in \mathbb{C}; \operatorname{Im}(pe^{i\theta}) > r, de^{R(1+ir)} < 1\},$$

$(a, \ell, d, r, R, \varepsilon; \text{定数}, \sigma = \pm 1, j = 1, 2, \dots, m).$



仮定 1 ~ 3 の下で主要結果は以下のよう述べられる;

定理 1.  $\varepsilon > 0$  を十分小さくするとき, 正定数  $a, \ell, h$  があつて  $Z$  上の正則関数列  $u_{\sigma, j}^{(\nu)}$  ( $\sigma = \pm 1, j = 1, \dots, m, \nu = 0, 1, \dots$ ) が以下の条件をみたすものが存在する;

(i) 次の形で  $(CP)_{\ell_0}^{\mathbb{C}}$  のひとつの解が与えられる:

$$(2.1) \quad u(t, x, y, \xi) = \sum_{j=1}^m u_{\sigma, j, R}(t, x, \xi; \varphi_j(t, x, y, \xi)) + h_{\sigma, R}(t, x, y, \xi).$$

ここで,  $h_{\sigma, R}$  は  $(t, x, y, \xi) = (0, 0, 0, \xi_0)$  の近傍で正則,  $\xi = 1$  かつ  $2-n$  次斉次な或る正則函数であり,  $u_{\sigma, j, R}(t, x, \xi; p)$  は

$$(2.2) \quad u_{\sigma, j, R}(t, x, \xi; p) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \int_{(2+1)R}^{\infty} e^{i p p / \xi_1} u_{\sigma, j}^{(\nu)}(t, x, \frac{p \xi}{\xi_1}) \frac{p^{n-1}}{\xi_1^n} dp$$

により与えられる.  $R$  は十分大きい正数である. ( $\sigma = \pm 1$ )

(ii) (2.2) 右辺は, 領域

$$\{(t, x, \xi, p) \in \mathbb{Z}_{\sigma} \times \mathbb{C}; d(t, R)h < 1, p/\xi_1 \in D_0(0)\} \\ \cup \bigcap_{j=1}^m \{(t, x, \xi, p) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{C}; d(t, R)h < 1, p/\xi_1 \in D_0(\varphi_j(t, \xi))\}$$

において広義一様収束し, 各積分路を Cauchy の積分定理により

$$C_{\sigma, R, \theta} = \{(2+1)R e^{i s \theta}; 0 \leq s \leq 1\} \cup \{(2+1)R e^{i \theta} s; s \geq 1\} \quad (-h < \theta < h)$$

に一斉に変形すると  $\mathbb{C}$  によって, 領域

$$\{(t, x, \xi, p) \in \mathbb{Z}_{\sigma} \times \mathbb{C}; p/\xi_1 \in D_1(d(t, R)h, 0, R)\} \\ \cup \bigcap_{j=1}^m \{(t, x, \xi, p) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{C}; p/\xi_1 \in D_1(d(t, R)h, \varphi_j(t, \xi), R)\}$$

にまで解析接続される. (2.1) 右辺は  $\sigma = \pm 1$  に対応する領域で正則であり, これらの共通部分では一致する.

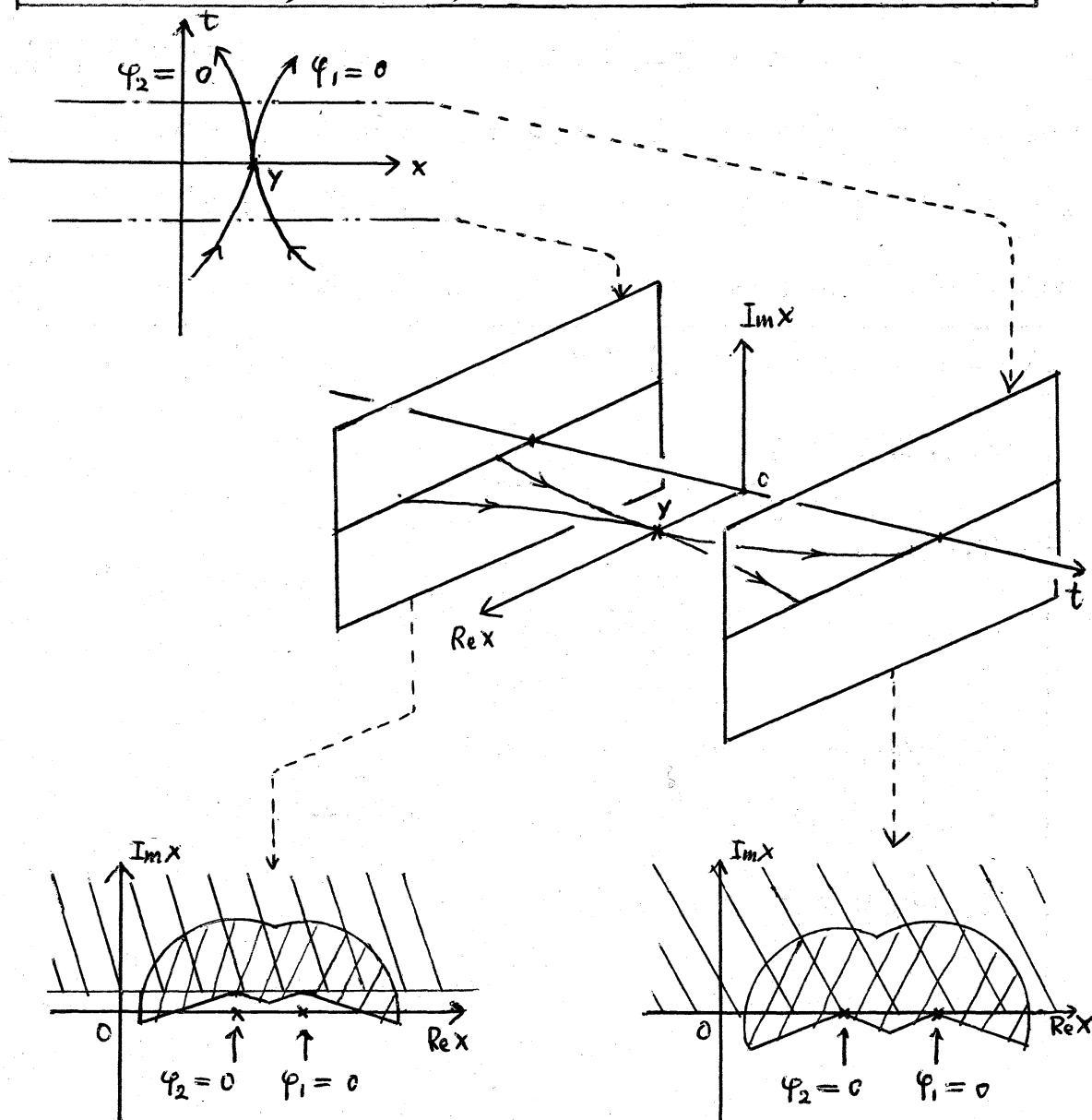
定理 2.  $(CP)_{i0}$  の解は (2.1) で定義された  $u(t, x, y, \xi)$  の“実軸上の境界値”によって与えられる. 則ち ( $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus 0$  に対して)


$$(2.3) \quad u(t, x, y, \xi) = \sum_{j=1}^m u_{\sigma, j, R}(t, x, \xi; \varphi_j(t, x, \xi) + F(0)) + h_{\sigma, R}(t, x, y, \xi).$$


更に  $\xi$  を実ベクトルとみなすとき, 特異性については,

$$(2.4) \quad \begin{cases} \text{sing. supp. } u \subset \bigcup_{j=1}^m \{\varphi_j = 0\}, \\ \text{S.S. } u \subset \bigcup_{j=1}^m \{(t, x, y; \sqrt{1} d\varphi_j \infty); \varphi_j = 0\}. \end{cases}$$

$m=2, n=1, \sigma=+1, \varepsilon=1$  の場合の (2.1) 右辺の定義域



 ----- 定理 1 (ii) 前半の広義一様収束により得られる部分。

 ----- 定理 1 (ii) 後半の解析接続により得られる部分。

$t \in S_\sigma, \sigma = \pm 1$  に応じて (2.1) による解の積分表示をとりかえれば,  
 $t \in \mathbb{R}$  至るときで  $\text{Im } \varphi_j > 0$  からの境界値がとれることがわかる。

**注意** (2.4) は  $(CP)_{ic}$  の解の特異性 (特異台 sing. supp., 特異スベクトル S.S.) が  $e^{-t\lambda_j(\xi)}$  ( $j=1, \dots, m$ ) の陪特性帯に沿って伝わることを示す. この結果自体は相原-河合 [10] の結果から直ちに従うかも知れないが, 我々の解の構成法はより具体的であって特異性の構造を調べるのに適している. (→ §3, §4)

実際には  $u_{\sigma,j}^{(\nu)}$  は次の各条件を満たすように構成される:

(A) 輸送方程式

$$(2.5) \quad (D_t^m + \sum_{i=1}^m A_i^{(0)} D_t^{m-i}) (e^{\sqrt{-1}\psi_j} u_{\sigma,j}^{(\nu)}) \\ = - \sum_{i=1}^m \sum_{\substack{\kappa, \lambda, \alpha \geq 0, \\ \kappa \neq \nu, \\ \nu = \kappa + \lambda + (q+1)|\alpha|}} \frac{1}{\alpha!} (\partial_{\xi}^{\alpha} A_i^{(\kappa)}) \cdot D_{\lambda}^{\alpha} D_t^{m-i} (e^{\sqrt{-1}\psi_j} u_{\sigma,j}^{(\lambda)}).$$

(B) 初期条件  $k=0, \dots, m-1$  に対して

$$(2.6) \quad \sum_{j=1}^m D_t^k (e^{\sqrt{-1}\psi_j} u_{\sigma,j}^{(\nu)}) \big|_{t=0} = \frac{(\sqrt{-1})^n \delta_{k,ic} \delta_{\nu,0}}{(n-1)!}.$$

(C) 増大度条件  $k=0, 1, \dots, m$  に対して,

$$(2.7) \quad |D_t^k u_{\sigma,j}^{(\nu)}| \leq C h^{\nu} |\xi|^{k - \frac{ic}{q+1}} d(t, \xi_1)^{kq} d(t, \frac{\xi_1}{\nu+1})^{\nu} \\ \times \begin{cases} d(t, \xi_1, 1)^{\frac{1}{q+1}} \mu_j(x, \xi) & \text{if } (t, x, \xi) \in \Sigma_{\sigma}, \\ d(t, \xi_1, 1)^{\frac{1}{q+1}} \mu_j(x, \xi) e^{\gamma_j(t, \xi) |\xi|} & \text{if } (t, x, \xi) \in \Sigma. \end{cases}$$

但し,  $\Sigma = \Sigma'$  以下の記号を用いた:

$$A_i^{(\nu)}(t, x, \xi) = \sum_{\substack{k \geq 0, i \geq j \geq 0 \\ \nu = k - (q+1)j + i}} t^k A_{i,j,k}(x, \xi), \quad (\rightarrow \text{仮定-3} \text{ 参照})$$

$$\pi_j(x, \xi) = - \sum_{i=1}^m \left\{ \frac{q}{2} (m-i+1)(m-i) A_{i-1, i-1, q(i-1) + \sqrt{-1}} A_{i, i-1, q(i-1)-1} \right. \\ \left. \times \lambda_j(\xi)^{m-i} \prod_{k=1, k \neq j}^m (\lambda_j(\xi) - \lambda_k(\xi))^{-1} \right\},$$



$$\mu_j(x, \xi) = \operatorname{Re} \pi_j(x, \xi),$$

$$\mu(x, \xi) = \max_{1 \leq j \leq m} \mu_j(x, \xi).$$

実際の構成においては行列形に書き直すのももう少し見易くなる。増大度条件は (2.2) が定理 1 (ii) の如く収束し解析接続されることを保証するものである。(→ §4)

$\mu_j(x, \xi)$  は吉川 [21] において パラメトリクスの微分可能性と関連して現われた量 であり, 我々の定式化に於ては Radon 積分 (2.2) の  $p \rightarrow 0$  における挙動 として反映される。実際容易に示されるように,  $p \rightarrow 0$  に於て次の評価が成立する;

$$|u_{\tau, j, R}| \leq \operatorname{Const.} |p/\xi| \frac{10}{9+1} - n - \max\{\mu_j(x, \xi), 0\}.$$

特に  $p \rightarrow 0$  で  $|p|$  の負べき程度の発散であるが, (2.3) は distribution である.  
(注意おかり)

### §3. 解の構成法——最も単純な場合

特異 Cauchy 問題  $(CP)_{i_0}^c, (CP)_{i_0}$  の解を構成して定理 1, 2 を証明することは, 結局, 輸送方程式 (2.5) を初期条件 (2.6) と増大度条件 (2.7) の下で解くことに帰着する。何故 (2.5) + (2.6) + (2.7) を解くことに帰着するのか? また, (2.5) + (2.6) + (2.7) を具体的にどうやって解くのか? ということに関しては, 高崎 [18] で詳しく説明しておいたので, 次の §4 において, §5 の議論に必要な準備と注意を与える範囲で, 大筋の方針を説明するにとどめよう。

この§ではこの前に、空間1次元 ( $n=1$ ) の輸送方程式系(2.5)が  $\nu=0$  しか残らない最も単純な場合について説明しておく。  
 これは、“何故多項式係数の常微分方程式が現われ、その解の大域的解析 (Stokes 現象 etc) が重要になるのか?” という事情を理解する上で極めて示唆的な例だからである。

これは、 $P$  が次の形にあらわされる場合のみである：

$$(3.1) \quad P = D_t^m + \sum_{i=1}^m \sum_{0 \leq j \leq \lfloor \frac{i}{q+1} \rfloor} a_{i,j} t^{(q+1)j-i} D_x^j D_t^{m-i},$$

$a_{i,j}$  : 定数

勿論、仮定 1, 仮定 2 は満たされているものとする。

**注意** これは天野 [4] で扱われた作用素の  $n=1$  の場合に他ならない。特に  $m=2$  の場合には

$$(3.2) \quad P = (D_t - \lambda t^q D_x)(D_t - \mu t^q D_x) + a t^{q-1} D_x + b D_t + c,$$

$a, b, c$  : 定数,  $\lambda, \mu$  : 相異なる実定数,

と表わされるものであって、中根 [13], 谷口-戸崎 [19] に於て詳しく解析された。□

以下 (3.1) について考えよう。  $n=1$  の場合  $u$  は  $(CP)_{i_0}^c, (CP)_{i_0}$  は  $\xi$  に属する斉次性により単純化される。則ち、変換

$$u(t, x, y, \xi) = v(t, x, y) \xi^{-1}$$

により  $(CP)_{i_0}^c, (CP)_{i_0}$  は次の形にうつせる；

$$(CP)_{i_0, \xi=1}^c \left\{ \begin{array}{l} P(t, D_t, D_x) v(t, x, y) = 0, \\ D_t^i v|_{t=0} = \frac{\delta_{ii_0}}{x-y} \quad (0 \leq i \leq m-1), \end{array} \right.$$

$$(CP)_{i_0, \xi=1} \begin{cases} P(t, D_t, D_x) v(t, x, y) = 0, \\ D_t^i v|_{t=0} = \frac{\delta i i_0}{x-y+\sqrt{-1}} \quad (0 \leq i \leq m-1). \end{cases}$$

今  $=$   $\tilde{v}$  Laplace 変換

$$(3.3) \quad v(t, x, y) = \int_0^\infty e^{\sqrt{-1}(x-y)\rho} \tilde{v}(t, \rho) d\rho$$

を施してみよう。すると、 $(CP)_{i_0}^c$  は次の形に変換される；

$$(CP)_{i_0}^c \begin{cases} P(t, D_t, \rho) \tilde{v}(t, \rho) = 0, \\ D_t^i \tilde{v}|_{t=0} = \sqrt{-1} \delta i i_0 \quad (0 \leq i \leq m-1). \end{cases}$$

これは多項式係数常微分作用素  $P(t, D_t, \rho)$  に対する初期値問題である。更に  $P$  の形 (3.1) の特殊性により、 $\rho^{-\frac{i_0}{2+1}} \tilde{v}(t \rho^{\frac{1}{2+1}}, 1)$  もまた  $(CP)_{i_0}^c$  の解であることが容易に示せる。従って解の一意性により、次の関係式が成立する；

$$(3.4) \quad \tilde{v}(t, \rho) = \rho^{-\frac{i_0}{2+1}} \tilde{v}(t \rho^{\frac{1}{2+1}}, 1), \quad \text{但し } \tilde{v}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{v}(t, 1).$$

結局、次の初期値問題を解くことに帰着する；

$$(CP)_{i_0, \rho=1}^c \begin{cases} L(t, D_t) \hat{v}(t) = 0, \\ (D_t^i \hat{v})(0) = \sqrt{-1} \delta i i_0 \quad (0 \leq i \leq m-1). \end{cases}$$

但し、次のように  $L(t, D_t)$  を定義した：

$$(3.5) \quad L(t, D_t) \stackrel{\text{def}}{=} P(t, D_t, 1) = D_t^m + \sum_{i=1}^m \sum_{0 \leq j \leq [\frac{i}{2+1}]} a_{ij} t^{(q+1)j-i} D_t^{m-i}.$$

積分 (3.3) が意味をもつ領域を調べる為には、 $\tilde{v}(t, \rho)$  の  $|\rho| \rightarrow \infty$  における挙動、或は (3.4) によれば、 $\tilde{v}(t)$  の  $|t| \rightarrow \infty$  における挙動を知るねばならない。ところで、 $L(t, D_t)$  は多項式係数の

常微分作用素で  $t = \infty$  に Poincaré rank  $q+1$  の不確定特異点をもつこと，しかも，変数変換

$$(3.6) \quad s = t^{q+1}$$

によつて  $s = \infty$  に Poincaré rank 1 の不確定特異点をもつ常微分作用素（有理式係数）に変換されること，しかも仮定 1 の条件  $\lambda_j(s) \neq \lambda_k(s)$  ( $j \neq k$ ) により  $s = \infty$  における特性根が互に相異なつていて，不確定特異点として最も扱い易い場合になつてゐることなどがわかる。（不確定特異点の他については，Wasow [20]，大久保-河野 [16] 参照）。従つてまず，齊次方程式  $L(t, D_t) w(t) = 0$  の形式解で次の形をもつものが構成される；

$$(3.7) \quad w_j(t) = \left( \sum_{k=0}^{\infty} w_{j,k} t^{-k} \right) t^{\pi_j(\alpha, 1)} e^{\sqrt{t} \psi_j(t, 1)}, \quad w_{j,0} = 1$$

( $j=1, 2, \dots, m$ ). (ここまでの過程は中村-孤生 [12] に詳しく説明されているので，ここでは具体的な手順は一切省く。) 次に，やはり  $\lambda_j(s) \neq \lambda_k(s)$  ( $j \neq k$ ) という仮定により，よく知られてゐるように (Wasow [20], §12), 形式解 (3.7) に 漸近する 正則解 が存在する。但し，これは，より正確には  $t$  が無限遠へ進む方向を指定しなければ，意味をなさない。 ここには， $S_\sigma$  ( $\sigma = \pm 1$ ) という sector をとり出して sector 毎に考えねばならぬ必然性がある。 正確な形で述べると，次のようなことが Wasow [20]，定理 12.3 より従ふ：

齊次方程式  $L(t, D_t)w = 0$  の正則解  $w_{\sigma, j} (\sigma = \pm 1, j = 1, \dots, m)$  2"

$$(3.8) \quad w_{\sigma, j}(t) t^{-\pi_j(\alpha, 1)} e^{-F\psi_j(t, 1)} \sim \sum_{k=0}^{\infty} w_{j, k} t^{-k} \quad \left( \begin{array}{l} t \rightarrow \infty \\ \text{in } S_{\sigma} \end{array} \right)$$

をみたすもの (則ち  $S_{\sigma}$  に於て形式解  $w_j(t)$  に漸近する真の解) が存在する。

そこで, (3.4) に注意して

$$(3.9) \quad \begin{cases} u_{\sigma, j}(t) \stackrel{\text{def}}{=} w_{\sigma, j}(t) e^{-F\psi_j(t, 1)}, \\ u_{\sigma, j}(t, p) \stackrel{\text{def}}{=} p^{-\frac{i_0}{2+1}} u_{\sigma, j}(tp^{\frac{1}{2+1}}), \end{cases}$$

とおけば,  $\{u_{\sigma, j}(t, p) e^{F\psi_j(t, p)}\}_{j=1}^m$  は各  $\sigma = \pm 1$  に対し齊次方程式

$P(t, D_t, p)w(t, p) = 0$  の 1 次独立な基本解系を与える。しか

も各  $u_{\sigma, j}(t, p)$  は (2.7) 前半の評価を  $k=0$  に対してみたす。

$(CP)_{i_0}^c$  の解  $\tilde{v}(t, p)$  は 2 個の 1 次独立解の定数係数 1 次結合の形で書かれる;

$$(3.10) \quad \tilde{v}(t, p) = \sum_{j=1}^m c_{\sigma, j} u_{\sigma, j}(t, p) e^{F\psi_j(t, p)}.$$

これを (3.3) に代入するとにより, 我々は (3.1) の形をした場

合の  $(CP)_{i_0}^c$  の解の表示を得る。これは定理 1 の (2.2) に於て,

$\nu = 0$  の項しかない場合に他ならない。 但し, (3.3) の積分は

$p=0$  の付近で発散する可能性がある。そのときには (2.2) の

よりに  $\int_R^{\infty} (R>0)$  の形にしておき, 誤差 (それは  $t=x=y=0$

で正則な初期 data になるから) を通常の Cauchy-Kowalevskaja

の定理で補正すればよい。(このような誤差補正は一般の場合も必要)

**注意**  $w_{\sigma, j}, u_{\sigma, j}$  は sector  $S_{\sigma}$  毎に与えられ  $\sigma$  によらず 同じ漸近形 (3.8)

をもつが、 $\sigma = +1$  と  $\sigma = -1$  で一般には一致しない。これが、いわゆる Stokes 現象 である。従って (3.10) の係数も一般には  $\sigma = +1$  と  $\sigma = -1$  では違ってくる。後に §5 で、この現象が 特異性分岐現象 と密接に関係していることを指摘する。□

#### §4. 解の構成法 — 一般の場合

§3 の冒頭で述べたように、大筋の方針のみ述べることにする。

まず  $(CP)_{\mathbb{C}_0}^{\mathbb{C}}$  の解を (2.1) + (2.2) の形で構成することが、何故 (2.5) + (2.6) + (2.7) を解くことに帰着するか？ についてであるが；

定理 1 (ii) の主張は (2.7) の条件から比較単純な評価によって導出される。(これについては高崎 [18] §2 を参照して頂くことにして、ここでは一切説明を省く。) また、(2.5) の形状は、根本的には微分作用素の Fourier 積分への作用に関する通常の公式を用いて導けるものと思つてよい。(実際、中村-瓜生 [12]、吉川 [21] ではそのようにして輸送方程式を導いており、(2.5) は中村-瓜生のそれと同じものである。) ただ、通常のように関する斉次性についてまとめるのではなく、左記の表

	$x$	$\xi$	$t$	$D_t$
weight	0	1	$\frac{-1}{q+1}$	$\frac{1}{q+1}$

によって定まる “準斉次性” (semi-homogeneity) によって

まとめるとある。(→吉川[2], 中村-瓜生[12]). 我々の場合には仮定1により  $\lambda_j$  が  $(t, x)$  に依存せず, 中村-瓜生よりかなり簡単になっていることを注意しておく.

勿論, 我々は  $C^\infty$  理論と異なり (2.1) + (2.2) の形の Radon 積分 を扱っているのをご改めて微分作用素の (2.1) 右辺各項への作用の公式を証明し直さなければならぬ, (高崎[18] §3 参照)

**注意** (Radon 積分, formal symbol etc):

(2.2) (或は (2.1) 右辺各項) を "Radon 積分" と呼ぶのは片岡[11], 青木[6], [7] との関連に於てである. 実際 (2.2) は

[7] の意味で, "formal symbol"  $\sum_{\nu=0}^{\infty} u_{\sigma,j}^{(\nu)}(t, x, \xi)$  を対応する

"Radon 変換" に他ならぬ. [11], [6], [7] は holomorphic micro-

local operator に対する formal symbol, Radon 変換を扱うのに対

して, 我々の (2.1) ではどちらかというと Fourier 積分作用素的

なものが現れているが,  $\lambda_j$  ( $\rightarrow$  仮定 1) が  $(t, x)$  に依存しない為

$\varphi_j(t, x, y, \xi) - \langle x-y, \xi \rangle = t^{1/q} \lambda_j(\xi)/(q+1)$  は  $x, y$  に依存せず,

ほとんど holomorphic microlocal operator と同じように扱える.

なお, formal symbol とみなすとき  $\sum_{\nu=0}^{\infty} u_{\sigma,j}^{(\nu)}(t, x, \xi)$  は classical ではない (i.e.,  $\xi$  についての斉次性で分解されていない) し,

[6] の意味では formal symbol になっただけ. しかし [7]

では formal symbol の枠が広げられ, 我々には入るようになったのである. また, 我々の formal symbol の class (2.7) の形の

条件を  $k=0$  に對してみたすよるもの.) は, "Boutet de Monvel class" (Boutet de Monvel [8], 吉川 [21]) の hyperfunction 版として自然なものである. (2.7) に於ける  $d(t, \xi_1)$  という重み函数が  $C^\infty$  理論でも Boutet de Monvel class に特徴的な量である.

たが, 正則函数・hyperfunction のカテゴリーでは (2.7) 右辺の

$$(4.1) \quad d(t, \frac{\xi_1}{\nu+1})^\nu \quad \left( \begin{array}{l} \nu \text{ に依存する因子は } h^\nu \text{ 以外には} \\ \text{これのみであることに注意せよ} \end{array} \right)$$

という因子の形が重要になる. 注意おわり

次に (2.5) + (2.6) + (2.7) の解の構成法について 簡単に説明しておく (§5 でもう少し具体的な説明を付け加える):

まず (2.5) の  $\nu=0$  は齊次常微分方程式であってその例とほとんど同様に扱える. 但し, 今度は  $\lambda_j(\xi/\xi_1)$  が  $\xi$  に依存したり  $A_i^{(0)}(t, x, \xi/\xi_1)$  も  $(x, \xi)$  に依存したりして, 正則パラメータを含む常微分方程式 になり, Wasow [20] 定理 12.3 はそのままでは使えない. しかし仮定 1 と 2 により,  $\lambda_j(\xi/\xi_1)$  は  $\xi$  が  $\xi_0$  の十分小さい錐近傍を動くとき十分に虚部が小さくなり,  $S_0$  の位置関係において  $\xi$ -依存性が悪影響を及ぼさなくなるので, Wasow [20] 定理 12.3 の証明が正則パラメータを含む場合にも同じように適用できることが示せる. (Wasow [20] では, 或る種の積分方程式 を使って定理 12.3 を証明しているが, その際大切なのは 積分方程式を定義する積分路のとり方 である.



$\lambda_j(\xi/\xi_1)$  の虚部が十分小さければ, その積分路が  $\xi$  によらずにとれることが示せる. 積分路さえとれれば他の部分は正則パウリータが入っても何ら問題はない. 詳しくは → 高崎 [18] §5.)

また (2.5)  $\nu > 0$  は非斉次常微分方程式とみなして, 定数変化法で解く. その際  $\nu = 0$  における斉次方程式の 1 次独立解として §3 の  $w_{\sigma j}$  の如きものを用いる. また, 積分路のとり方は西本 [14] に従う. このときにも, 仮定 1, 2 により,  $\lambda_j(\xi/\xi_1) - \lambda_k(\xi/\xi_1)$  ( $j \neq k$ ) の虚部が  $\xi_0$  の近傍で十分に小さいことを利用する. こういうことを仮定しないと,  $\xi$  に依存しない積分路をうまくとれないのである. (→ なが次の 注意 の最後の部分) の指摘を見よ.

なお, (2.7) 後半の評価を示すには, 各々で  $S_0$  と同様に (2.5) + (2.6) + (前) の解が構成・評価でき, かつ全体として複素平面をおおおうような, 有限個の sector の族を使って議論する.

(以上詳細は 高崎 [18] §4~6 参照.)

**注意** (特性曲面  $\varphi_j = 0$  のまわりへの解析接続):

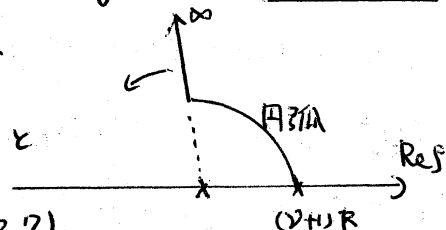
$A_i^{(\nu)}(t, x, \xi)$  ( $\rightarrow p(\tau)$ ) は,  $\tau$  は下段に述べた意味で,  $\frac{i-\nu}{q+1}$  次準斉次であり,  $\psi_j(t, \xi)$  は 0 次準斉次である. 従って, (2.5), (2.6) は準斉次の条件になつていて, 我々は  $u_{\sigma, j}^{(\nu)}$  に対して, 次の 準斉次性の条件 を課すことができる;

$$(4.2) \quad u_{\sigma, j}^{(\nu)}(t, x, \xi) = \xi_1^{-\frac{i-\nu}{q+1}} u_{\sigma, j}^{(\nu)}\left(t \xi_1^{\frac{1}{q+1}}, x, \xi/\xi_1\right).$$

これにより (2.5) + (2.6) + (2.7) はすべて  $\xi_1 = 1$  の場合のみ考えれば十分である。(これは §3 にあける  $(\hat{CP})_{i_0}^c$  から  $(\hat{CP})_{i_0, f=1}^{\sigma}$  の reduction に対応する.)

ところで, (2.1) 右辺の特性曲面  $\varphi_j = 0$  ( $j=1, \dots, m$ ) のまわりへの解析接続は (2.2) にあける積分路

を右図の如くどんな変形してゆくことにより達成できるはず。(円弧の部分は (2.7)



のタウプの評価がある限り  $p = 0$  で正則な寄与しかない。このことは高崎 [18] §2 の中の議論と同様にして示せる。) しかし問題は, 例えば  $u_{\sigma, j}^{(v)}$  は  $t$  が  $S_0$  の外へ出るともはや (2.7) 前半 ("if  $(t, x, \xi) \in Z_0$ ") の評価をみたさないことであって,  $p$ -  
(Stokes 現象による)  
平面の上でそのような積分路の変形を続けてゆけば, (4.2) により (2.7) 前半の評価はやがて破れる。則ち (2.1) 右辺の項別の積分路変形はできなくなってしまう。

これを救うには, §3 (3.10) のような分解を <sup>(今後物論 輸送方程式系全体についてだが)</sup> Stokes 現象があき  
るたびにやり直せばよい。 具体的には複素平面を有限個の適  
当な sector 達でおおひ, 各 sector では  $S_0$  と同様に (2.5) + <sup>(2.7)</sup><sub>前半</sub>  
を解けるような状況にしおいて,  $u_{\sigma, j}^{(v)} e^{i\varphi_j}$  を  $S_0$  と重なり合  
<sup>(勝手な初期値の下で)</sup>  
うとなる sector で (3.10) の如く 指数関数  $\times$  (多項式増加因子)  
の形の関数の和に分解し, 更に各々を次の隣りの sector で分解  
し ..... ということをくりかえせばよい。これは高崎 [18] §6

とほとんど同様の議論で実行できる。かくして、次を得る:

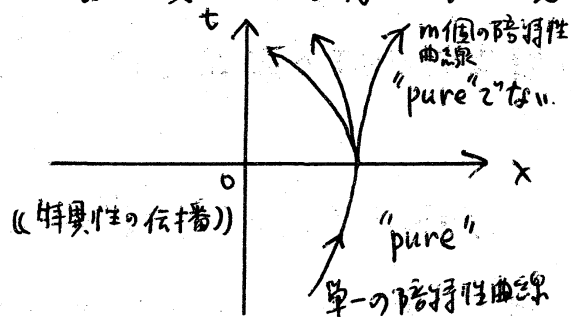
定理1で得た  $(CP)^d_{i_0}$  の解は特性曲面  $\varphi_j = 0$  ( $j=1, \dots, m$ ) のまわりに多価正則に解析接続できる。

なお、仮定2の双曲性は、複素領域における解を考えたときには必要ではない。 $S_0$  などのかわりに 別の適当な sector をとれば同様の議論ができるからである。 注意おわり 達

この§の議論はすなわち、(2.5), (2.6), (2.7) を行列形に書き直したうえで実行される。その方が評価をしやすいかである。(→高崎[18], §4~§6.) 行列形は §5 で用いるので改めてそこで説明することにしよう。

### §5. 特異性分岐現象

$q > 0$  の場合、 $(t, x, \tau, \xi) = (0, 0, 0, \xi) \in T^*(\mathbb{C} \times \mathbb{C}^n)$  を通る陪特性帯は  $m$  個存在する。つまり  $q > 0$  ( $t=0$  で多重特性的) の場合には、 $t=0$  で交わるような相異なる陪特性帯が現われる。その場合においては、 $t=0$  を越えるときの特異性の伝わり方が単純特性的な場合と大きく異なる。例えば  $t < 0$  に



於てひとつの陪特性帯にのみ特異性をもつような  $Pu=0$  の解(=313 解を Alinhac [3] に従って " $t < 0$  で pure である")と

言うことにする。)を考えよう。  $t < 0$  では  $P$  は単純特性的だから  $u$  の特異性は陪特性帯に沿って伝播する。しかし、  $t > 0$  においては一般には  $u$  は "pure" ではないことがおきり得る。つまり、  $t < 0$  において  $u$  の特異性を運んでいた陪特性帯とは別の陪特性帯へと特異性が "枝分かれ" する。これが、"特異性分岐 (branching of singularities)" の現象である。

§3 で扱った例で  $m = 2$  の場合は、中根 [13]、谷口・戸崎 [19] によって詳細に特異性分岐の様子が調べられた。彼らは、各々 Gauss の超幾何函数、Kummer の合流超幾何函数に対する接続公式を用いて具体的な計算を行った。(ちょうど互いが他々の Laplace 変換になっている。) 天野 [4] は §3 で扱った例 ( $m$  は任意、  $n$  も任意) について、特異性伝播が  $L(t, D_t)w = 0$  ( $\rightarrow$  6.5) の Stokes 現象によって支配されることを示した。天野・中村 [5] はこの結果をもう少し発展させている。

なお、Hanges [9] と大阿久 [15] は各々全く異なる観点から特異性分岐の解析を行っており、興味深い。

天野 [4] により、特異性分岐現象の "主要な部分" が Stokes 現象で支配されていることは明白である。以下この § では特異性分岐の 形式的側面 への目線を向け、"分岐作用素" なる行列型作用素 (後に導入する。) を用いる議論を試みよう。但し、以下の

議論の細部には筆者がまだ厳密に正当性をチェックしていない部分があることを、あらかじめお断わりしておく。(主に積分核の合成の具体的計算に関することであり、結果的には正しいはずである。)以後すべての議論を microfunction のカテゴリで進める。また片岡[11]青木[6],[7]の理論を積極的に利用する。

特異性分岐を記述するには Alinhac [1]~[3], 天野[4], 中根[13], 谷口・戸崎[19] のように  $\pm t > 0$  各々で "pure" な  $m$  個の 1 次独立齊次解系を利用するのが便利である。(2.1) 右辺の各項は確かに  $0 < t$  で "pure" だが Stokes 現象との関係が見にくいので, 別の解系で  $0 < t$  に於て "pure" なものを構成したい。それが (2.1) の形の解と全く同様のやり方で構成できることを以下に示そう。

その前に (2.1) の解の構成法を (54 の説明につけ加える形ど) より具体的に説明しておく: まず (2.5) + (2.6) + (2.7) を行列形に書直す。 その為には次の  $m \times m$  行列を導入する。

$$U_{\sigma,j}^{(v)}(t,x,\xi) = \begin{bmatrix} u_{\sigma,0,j}^{(v)} e^{F\psi_j}, \dots, u_{\sigma,m-1,j}^{(v)} e^{F\psi_j} \\ D_t(u_{\sigma,0,j}^{(v)} e^{F\psi_j}), \dots, D_t(u_{\sigma,m-1,j}^{(v)} e^{F\psi_j}) \\ \vdots \\ D_t^{m-1}(u_{\sigma,0,j}^{(v)} e^{F\psi_j}), \dots, D_t^{m-1}(u_{\sigma,m-1,j}^{(v)} e^{F\psi_j}) \end{bmatrix} \quad (j=1, \dots, m),$$

$$A^{(v)}(t,x,\xi) = \begin{bmatrix} 0 & -\delta_{v,0} & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & -\delta_{v,0} \\ A_m^{(v)} & \dots & A_2^{(v)} & A_1^{(v)} \end{bmatrix}, \quad T(t) = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & t & & \\ & & t^2 & \\ & & & \ddots \\ & & & & t^{m-1} \end{bmatrix}.$$

但しここで、定理 1 の  $(CCP)_{\ell_0}^{(v)}$  に対する  $u_{\sigma,j}^{(v)}$  を改めて  $u_{\sigma,i,j}^{(v)}$  と記した。

すると (2.5), (2.6), (2.7) はそれぞれ次のように書直せる (→ 高崎 [18], §4):

$$(5.1) \quad (D_t + A^{(0)}) U_{\sigma,j}^{(\nu)} = - \sum^* \frac{1}{\alpha!} (\partial_{\xi}^{\alpha} A^{(k)}) \cdot (D_x^{\alpha} U_{\sigma,j}^{(\lambda)}),$$

$$(5.2) \quad \sum_{j=1}^m U_{\sigma,j}^{(\nu)}|_{t=0} = \frac{(F_1)^{\nu} \delta \nu, 0}{(n-1)!},$$

$$(5.3) \quad |T(|\xi_1|^{-1} d(t, \xi_1)^{-1}) U_{\sigma,j}^{(\nu)} e^{-F_1 \psi} T(|\xi_1|^{\frac{1}{q+1}})| \\ \leq C h^{\nu} d(t, \frac{\xi_1}{\nu+1})^{\nu} \times \begin{cases} d(t \xi_1^{\frac{1}{q+1}}, 1)^{\mu_j(x, \xi)} & (t, x, \xi) \in Z_{\sigma}, \\ d(t \xi_1^{\frac{1}{q+1}}, 1)^{\mu(x, \xi)} e^{\mu_j(t, \xi) |\xi|} & (t, x, \xi) \in Z. \end{cases}$$

但し (2.5) 右辺の  $\sum_{\substack{k, \lambda, \alpha \geq 0, \\ \lambda \neq \nu, \nu = k + \lambda + (q+1)\alpha_1}}^*$  を  $\sum^*$  と略記した。

(5.1) ~ (5.3) は  $\xi_1 = 1$  のときのみ考えれば十分。実際  $U_{\sigma,j}^{(\nu)}(t, x, 1, \xi')$

が (5.1) ~ (5.3) を  $\xi_1 = 1$  の下で満たせば,

$$(5.4) \quad U_{\sigma,j}^{(\nu)}(t, x, \xi) \stackrel{\text{def}}{=} \xi_1^{-\frac{\nu}{q+1}} T(\xi_1^{\frac{1}{q+1}}) U_{\sigma,j}^{(\nu)}(t \xi_1^{\frac{1}{q+1}}, x, 1, \xi'/\xi_1) \quad \left( \begin{smallmatrix} (4.2) \text{に} \\ \text{対応する} \end{smallmatrix} \right)$$

は一般の  $\xi_1$  に対して成り立つをみたすから、ここから以後  $\xi_1 = 1$

の下で考え、混乱の恐れのない限り  $(x, \xi')$  を略して書かない。

$U_{\sigma,j}^{(\nu)}(t)$  は次のように構成される: まず,  $(D_t + A^{(0)})V = 0$  の  $m \times m$  可逆正則解  $V_{\sigma}(t, x, \xi) \stackrel{(4.1) \nu=0}{\sim} (5.4)$  と同じ条件をみたし,  $V_{\sigma}(t) = V_{\sigma}(t, x, 1, \xi')$  が

$$(5.5) \quad T(t^{-1}) V_{\sigma}(t) \begin{bmatrix} t^{-\pi_1} e^{-F_1 \psi_1(t)} & & \\ & \ddots & \\ & & t^{-\pi_m} e^{-F_1 \psi_m(t)} \end{bmatrix} \sim 1 + O(t^{-1}) \quad \left( \begin{smallmatrix} \text{in } S_{\sigma} \\ t \rightarrow \infty \end{smallmatrix} \right)$$

を満たすものを構成する (高崎 [18], §5). そして  $U_{\sigma,j}^{(0)}$  を次で定義する。

$$(5.6) \quad U_{\sigma,j}^{(0)}(t) = V_{\sigma}(t) E_j V_{\sigma}(0)^{-1}, \quad \text{但し } E_j = \begin{bmatrix} & \\ & 1 \end{bmatrix} \Big|_j.$$

また  $U_{\sigma,j}^{(\nu)} (\nu > 0)$  は  $\nu$  について帰納的に次により定義する。

$$(5.7) \quad U_{\sigma,j}^{(\nu)}(t) = V_{\sigma,j}^{(\nu)}(t) - U_{\sigma,j}^{(0)}(t) \sum_{k=1}^m V_{\sigma,j}^{(\nu)}(0),$$

$$\text{但し,} \quad F_{\sigma,j}^{(\nu)}(t) = - \sum^* \frac{1}{\alpha!} (\partial_{\xi}^{\alpha} A^{(k)}(t, x, 1, \xi')) \cdot (D_x^{\alpha} U_{\sigma,j}^{(\lambda)}(t)),$$

及び, 
$$V_{\sigma,j}^{(\nu)}(t) = \sum_{i=1}^m \int_{\gamma_{\sigma,i,j}(t)} V_{\sigma}(t) E_i V_{\sigma}(s)^{-1} F_{\sigma,j}^{(\nu)}(s) ds,$$

とおいた.  $\gamma_{\sigma,i,j}(t)$  は両本 [14] で用いられたのと同様の積分路だが説明は省く. こゝして導入した  $U_{\sigma,j}^{(\nu)}$  が実際に (5.1) ~ (5.3) を満たすことは  $\nu$  に関する帰納法で示される (高崎 [18] §5, §6).

次に, 対応する Radon 積分が  $\sigma t > 0$  で "pure" な斉次解を与えるような  $m \times m$  行列 関数列  $W_{\sigma,j}^{(\nu)}(t, x, \xi)$  を構成しよう. (これが, p20 で述べたような求める解系を与える)

$W_{\sigma,j}^{(\nu)}(t, x, \xi)$  には (5.4) と同じ条件を課し,  $W_{\sigma,j}^{(\nu)}(t, x, 1, \xi')$  (これを  $W_{\sigma,j}^{(\nu)}(t)$  と略記する) は次により  $\nu$  に関して帰納的に定義する:

$$(5.8) \quad W_{\sigma,j}^{(0)}(t) = V_{\sigma}(t) E_j,$$

$$(5.9) \quad W_{\sigma,j}^{(\nu)}(t) = \sum_{i=1}^m \int_{\gamma_{\sigma,i,j}(t)} V_{\sigma}(t) E_i V_{\sigma}(s)^{-1} G_{\sigma,j}^{(\nu)}(s) ds \quad (\nu > 0),$$

但し,  $G_{\sigma,j}^{(\nu)}(t) = - \sum^* \frac{1}{\alpha!} (\partial_{\xi}^{\alpha} A_{(t,x,1,\xi')}^{(k)}) \cdot (D_x^{\alpha} W_{\sigma,j}^{(\nu)}(t)).$   
 こゝして定めた  $W_{\sigma,j}^{(\nu)}$  (5.1), (5.3) と同じ形の条件をみたすこと

が高崎 [18] §6 と全く同じ議論で示せる. しかも容易にわかるように, 次が成立する:

$$(5.10) \quad \begin{cases} W_{\sigma,j}^{(\nu)}(t, x, \xi) E_k = 0 \quad (j \neq k), \\ W_{\sigma,j}^{(\nu)}(t, x, \xi) = W_{\sigma}^{(\nu)}(t, x, \xi) E_j. \end{cases}$$

但し,

$$W_{\sigma}^{(\nu)}(t, x, \xi) = \sum_{j=1}^m W_{\sigma,j}^{(\nu)}(t, x, \xi)$$

とおいた.

(5.1) はもとの特異 Cauchy 問題  $(CP)_i^c, (CCP)_i$  ( $i=0, \dots, m-1$ ) の輸送方程式を行列形に書き直したものに他ならないから,

$$(5.11) \quad \begin{cases} \hat{U}_{\sigma,j}^{(\nu)}(t, x, \xi) = U_{\sigma,j}^{(\nu)}(t, x, \xi) e^{-\hbar \psi_j(t, \xi)}, \\ \hat{W}_{\sigma,j}^{(\nu)}(t, x, \xi) = W_{\sigma,j}^{(\nu)}(t, x, \xi) e^{-\hbar \psi_j(t, \xi)}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} U_{\sigma,j}(t,x,\xi;p) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \int_{(\nu H)R}^{\infty} e^{\sqrt{-1}p\xi/\xi_1} \hat{U}_{\sigma,j}^{(\nu)}(t,x,\frac{p\xi}{\xi_1}) \frac{p^{n-1}}{\xi_1^n} d\xi, \\ W_{\sigma,j}(t,x,\xi;p) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \int_{(\nu H)R}^{\infty} e^{\sqrt{-1}p\xi/\xi_1} \hat{W}_{\sigma,j}^{(\nu)}(t,x,\frac{p\xi}{\xi_1}) \frac{p^{n-1}}{\xi_1^n} d\xi, \end{cases}$$

と書くとき，これは定理 1(ii) と同様の定義域をもち，更に

$$(5.12) \quad (D_t + \begin{bmatrix} 0 & & -1 & & \\ & \ddots & & \ddots & \\ & & 0 & & -1 \\ A_m(t,x,D_x) & \cdots & A_2(t,x,D_x) & A_1(t,x,D_x) \end{bmatrix}) U = 0$$

$\sigma t > 0$  "purely",  
 の解であり， $\sum_{j=1}^m U_{\sigma,j}(t,x,\xi; \varphi_j + \sqrt{-1}0)$  は  $\sigma = \pm 1$  による  
 $R_t \times R_x^n \times (R_\xi^n \setminus 0)$  上の  $m$  つの microfunction を定める．その  
 $t=0$  での Cauchy data は  $\langle x-y, \xi \rangle + \sqrt{-1}0)^m$  である．

$U_{\sigma,j}(t,x,\xi; \varphi_j + \sqrt{-1}0)$ ， $W_{\sigma,j}(t,x,\xi; \varphi_j + \sqrt{-1}0)$  の  $t=0$  への trace は，各々  
 $U_{\sigma,j}(0,x,\xi; \langle x-y, \xi \rangle + \sqrt{-1}0)$ ， $W_{\sigma,j}(0,x,\xi; \langle x-y, \xi \rangle + \sqrt{-1}0)$  であり，こ  
 れは  $\{t=0\}$  上の microfunction として意味がある．（1,2 の証明と同様  
 にしてわかる．）

さて，これらの解を使ってどのように特異性分岐現象を調

べるのか？ という点について以下簡単に説明しよう．

まず， $\hat{U}_{\sigma,j}^{(\nu)}$ ， $\hat{W}_{\sigma,j}^{(\nu)}$  が (5.3) の増大度条件を満たすことにより，形  
 式的級数  $\sum_{\nu=0}^{\infty} \hat{U}_{\sigma,j}^{(\nu)}(t,x,\xi)$ ， $\sum_{\nu=0}^{\infty} \hat{W}_{\sigma,j}^{(\nu)}(t,x,\xi)$  は  $pH$  注意 の意味で  $\overline{Z_0}$  に  $\text{formal}$   
 symbol である．従ってパラ  $x-\partial_t$  を含む holomorphic microlocal  
 operator  $\sum_{\nu=0}^{\infty} \hat{U}_{\sigma,j}^{(\nu)}(t,x,D_x)$ ， $\sum_{\nu=0}^{\infty} \hat{W}_{\sigma,j}^{(\nu)}(t,x,D_x)$  が  $\overline{Z_0}$  で定義される．

$\varphi_j = \varphi_j - \langle x-y, \xi \rangle$  が  $x$  に依存しないとして， $(\varphi_j + \sqrt{-1}0)^{-n}$  が容  
 易に Radon 変換の形で表示できること，などに注意すれば，



片岡[11], 青木[6], [7]の理論を用いて次のような関係式を得る  
 だろ(\*) ("."は holomorphic microlocal operator の microfunction 作用を表す):

$$(5.13) \quad \begin{cases} \hat{U}_{\sigma,j}(t, x, \xi; \varphi_j + \sqrt{t}0) = \hat{U}_{\sigma,j}(t, x, D_x) \cdot (\varphi_j + \sqrt{t}0)^{-n}, \\ \hat{W}_{\sigma,j}(t, x, \xi; \varphi_j + \sqrt{t}0) = \hat{W}_{\sigma,j}(t, x, D_x) \cdot (\varphi_j + \sqrt{t}0)^{-n}, \end{cases}$$

ただし  $n = 2$

$$\hat{U}_{\sigma,j}(t, x, D_x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \hat{U}_{\sigma,j}^{(\nu)}(t, x, D_x),$$

$$\hat{W}_{\sigma,j}(t, x, D_x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \hat{W}_{\sigma,j}^{(\nu)}(t, x, D_x).$$

とおいた。

$$(5.14) \quad \hat{W}_{\sigma}(0, x, D_x) = \sum_{j=1}^m \hat{W}_{\sigma,j}(0, x, D_x)$$

とおいて, これについて考えよう。

$\hat{W}_{\sigma}(0, x, D_x)$  は  $\sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{j=1}^m \hat{W}_{\sigma,j}^{(\nu)}(0, x, \xi) \in \text{formal symbol}$  とする  $\{t=0\}$  上の holomorphic microlocal operator で,  $T(\xi, \frac{1}{\sqrt{t}}) \sum_{j=1}^m \hat{W}_{\sigma,j}(0, x, \xi) T(\xi, \frac{1}{\sqrt{t}}) \sim O\left(\frac{(\nu+1)^{\nu/(q+1)}}{|\xi|^{\nu/(q+1)}}\right) (|\xi| \rightarrow \infty)$  だから 青木[6] で扱われたものになる。しかも leading term は

$$(5.15) \quad \sum_{j=1}^m \hat{W}_{\sigma,j}^{(0)}(0, x, \xi) = V_{\sigma}(0, x, \xi)$$

で与えられ, 特に可逆。従って  $\hat{W}_{\sigma}(0, x, D_x)^{-1}$  が意味をもつ。

さて  $n = 2$ , “分岐作用素”  $B_{\sigma, \sigma'}(x, D_x)$  を定義する:

$$\text{定義: } B_{\sigma, \sigma'}(x, D_x) = \hat{W}_{\sigma}(0, x, D_x)^{-1} \hat{W}_{\sigma'}(0, x, D_x).$$

これは, 上に述べたように, [6] の意味で  $\{t=0\}$  上の holomorphic microlocal operator を定める。しかも (5.15) に注意すれば, 次のを得る:

(\*) 筆者はまだ完全に厳密な証明を知らない。以下, これを認めて議論を進める。

$$(5.16) \quad B_{\sigma, \sigma'}(x, D_x) = C_{\sigma, \sigma'}(x, D_x) + (\text{lower order})$$

ここに,  $C_{\sigma, \sigma'}(x, \xi)$  は  $S_\sigma, S_{\sigma'}$  の間の Stokes 係数である:

$$(5.17) \quad C_{\sigma, \sigma'}(x, \xi) = V_\sigma(0, x, \xi)^{-1} V_{\sigma'}(0, x, \xi).$$

( $C_{\sigma, \sigma'}(x, \xi) \sim O(1)$  ( $|\xi| \rightarrow \infty$ ) に注意.) 特に §3 で扱った場合 (それは 天野 [4], 中根 [13], 谷口-戸崎 [19] で扱われた場合だが) には,  $\hat{W}_{\sigma, j}, B_{\sigma, \sigma'}, C_{\sigma, \sigma'}$  は  $x$  に依存せず, 次が成立する:

$$B_{\sigma, \sigma'}(D_x) = C_{\sigma, \sigma'}(D_x).$$

最後に,  $\{t > 0\}$  で "pure" な解  $W_{\sigma, j}(t, x, \xi; \varphi_j(t, x) + \sqrt{t}0)$  の (5.12) の解としての  $\{t > 0\}$  への接続 (存在は 柏原-河合 [10] が保証) を, 分岐作用素がどのように記述するか? ということを説明しよう: まず行列形での Cauchy 問題の基本解核は, Cauchy data を比較することによりわかるように ( $\rightarrow$  (5.13)), 次で与えられる.

$$\begin{aligned} & \frac{(n-1)!}{(-2\pi\sqrt{t})^n} \int_{|\xi|=1} \sum_{j=1}^m U_{\sigma, j}(t, x, \xi'; \varphi_j(t, x, y, \xi') + \sqrt{t}0) \omega(\xi') \quad (\rightarrow \text{p. 2}) \\ &= \frac{(n-1)!}{(-2\pi\sqrt{t})^n} \sum_{j=1}^m \int dx' \int_{|\xi|=1} \omega(\xi') W_{\sigma, j}(t, x, \xi'; \varphi_j(t, x, x', \xi') + \sqrt{t}0) \\ & \quad \times \hat{W}_\sigma(0, x', D_{x'})^{-1} \delta(x' - y). \end{aligned}$$

$W_{\sigma, j}(t, x, \xi; \varphi_j(t, x) + \sqrt{t}0)$  の  $\{t > 0\}$  への接続は, (基本解核と trace  $W_{\sigma, j}(0, x, \xi; \langle x - y \rangle + \sqrt{t}0)$  とを合成すれば得られるから) 結局,

$$\begin{aligned} (5.18) \quad & \frac{(n-1)!}{(-2\pi\sqrt{t})^n} \sum_{j=1}^m \int dx' \int_{|\xi|=1} \omega(\xi') W_{\sigma, j}(t, x, \xi'; \varphi_j(t, x, x', \xi') + \sqrt{t}0) \\ & \times (\hat{W}_\sigma(0, x', D_{x'})^{-1} \delta(x' - x'')) W_{\sigma, j}(0, x'', \xi; \langle x'' - y \rangle + \sqrt{t}0) \end{aligned}$$

$$= \frac{(n-1)!}{(-2\pi i)^n} \sum_{j=1}^m \int_{|\xi|=1} dx' \left( \omega(\xi') W_{\sigma,j}(t, x, \xi'; \varphi_j(t, x, x'; \xi') + \sqrt{10}) \times \right. \\ \left. \times (B_{\sigma,\sigma'}(x', D_{x'})_{(j,j')} (\langle x' - y, \xi \rangle + \sqrt{10})^{-n}) \right),$$

或は更に (5.17) を使って

$$= \frac{(n-1)!}{(-2\pi i)^n} \sum_{j=1}^m \int dx' \left( \omega(\xi') W_{\sigma,j}(t, x, \xi'; \varphi_j(t, x, x'; \xi') + \sqrt{10}) \times \right. \\ \left. \times (C_{\sigma,\sigma'}(x', D_{x'})_{(j,j')} + \begin{pmatrix} \text{lower} \\ \text{order} \end{pmatrix}) (\langle x' - y, \xi \rangle + \sqrt{10})^{-n} \right)$$

と与えられる。

右辺の  $\sum_{j=1}^m$  の各項は  $\{\varphi_j = 0\}$  における特異性をもつ "pure" であり、 $B_{\sigma,\sigma'}(x', D_{x'})_{(j,j')}$  の order が下がればそれだけ  $\{\varphi_j = 0\}$  での特異性も下がる。 (特に Stokes 係数が消えればそうなる。) また天野-中村 [5] で示されたように、Stokes 係数が消えなければ対応する "pure" な成分が決して消えない (特異性がとちうへ分岐している) ということも示せるであろう。 しかし、それ

らの議論を正当化する為には (5.18) 右辺をもう少し計算して見易くする必要がある。 それは Fourier 積分作用素の calculus

と同様のものになるであろうが、ここではまだ出来ていない。今後に残された問題である。(§3 で扱われた場合には、議論ははるかに単純化され、上に述べたようなことは正当化できる。

§6. 最後の注意 (i) 新井 [17] は "完全対角化" の方法でパウリマトリクスを構成している。これは不確定特異点において形式解を構成するときの "福原対角化" の類似による方法であるが、複素領域或は hyperfunction レベルでの議論には、今のところ、

使えないようである。□

(ii) 最近, Levi条件( $\rightarrow$ 仮定3)を仮定しない場合の  $(CP)^c_{\Sigma}$  の解構成が東大理(数学教室)の打越敬祐氏により進められているとのことであり, 大いに注目される。その場合には解は  $\varphi_j = 0$  (複素領域で) に近づくとつれて真性特異点的に発散するものになり, 実領域では distribution ではなく適当な order の Gevrey-ultra-distribution になるはずである。(→ c.f. §2 末尾の注意。) □

## References

1. Alinhac; Paramétrix et propagation des singularités pour un problème de Cauchy à multiplicité variable, Société Math. France, Asterisque 34-35.
2. ———; Parametrix pour un système hyperbolique à multiplicité variable, Comm. Partial Differential Equations, 2 (1977), 251-296.
3. ———; Branching of singularities for a class of hyperbolic operators, Indiana Univ. Math. J., 27 (1978), 1027-1037.
4. Amano; Branching of singularities for degenerate hyperbolic operators and Stokes phenomena, Proc. Japan Acad., 56A (1980), 206-209.
5. Amano-Nakamura; ditto. II, ibid., 57A (1981), 164-167.
6. Aoki; Invertibility for microdifferential operators of infinite order, to appear in Publ. RIMS. Kyoto Univ.
7. ———; Calcul exponentiel des opérateurs microdifférentiels d'ordre infini I, (preprint).
8. Boutet de Monvel; Hypocoelliptic operators with double characteristics and related pseudodifferential operators, Comm. Pure Appl. Math., 27 (1974) <sup>585</sup> <sub>639</sub>.
9. Hanges; Parametrixes and propagation of singularities for operators with non-involutive characteristics, Indiana Univ. Math. J., 28 (1979), 87-97.

10. Kashiwara-Kawai; Microhyperbolic pseudodifferential operators I, J. Math. Soc. Japan, 27 (1975), 359-404.
11. Kataoka; On the theory of Radon transformations of hyperfunctions, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sec. IA, 28 (1981), 331-413.
12. Nakamura-Uryu; Parametrix of certain weakly hyperbolic operators, Comm. Partial Differential Equations, 5 (1980), 837-896.
13. Nakane; Propagation of singularities and uniqueness in the Cauchy problem at a class of doubly characteristic points, Comm. Partial Differential Equations, 6 (1981), 917-927.
14. Nishimoto; On a matching method for a linear ordinary differential equations containing a parameter II, Kodai Math. Sem. Rep, 18 (1966) <sup>61</sup>84.
15. Ôaku; A canonical form of a system of microdifferential equations with non-involutory characteristics and branching of singularities, Invent. Math., 65 (1982), 491-525.
16. 大久保-河野; 漸近展開, (新しい応用の数学シリーズ) 教育出版.
17. Shinkai; On the fundamental solutions for a degenerate hyperbolic systems, Osaka J. Math., 18 (1981), 257-288.
18. Takasaki; Singular Cauchy problems for a class of weakly hyperbolic differential operators, to appear in Comm. Partial Differential Eq.
19. Taniguchi-Tozaki; A hyperbolic equation with double characteristics which has a solution with branching singularities, Math. Japonica 25 (1980), 279-300.
20. Wasow; Asymptotic expansions for ordinary differential equations, (1965), Interscience.
21. Yoshikawa; Construction of parametrix for the Cauchy problem of some weakly hyperbolic equation I, Hokkaido Math. J., 6 (1977), 313-344; ditto II, ibid., 7 (1978), 1-26; ditto III, ibid., 7 (1978) <sup>127</sup>141.



## ◁ 目次 ▷

- |                              |                             |
|------------------------------|-----------------------------|
| §1. 問題設定と背景説明 (p.1-3)        | §4. 解の構成法 — 一般の場合 (p.13-18) |
| §2. 主要な結果 (p.4-8)            | §5. 特異性分岐現象 (p.18-26)       |
| §3. 解の構成法 — 最も単純な場合 (p.8-13) | §6. 最後の注意 (p.26-27)         |